

59 數學遊戲的初體驗

59.1 青蛙交換

有六隻青蛙站在排成一直線的七個格子中的六個，每次只能讓一隻青蛙跳動，而且只能前進一格或跳過一隻青蛙進入前一格：



是否可以找到將左邊的三隻青蛙與右邊的三隻青蛙互換的跳動模式？

59.2 沙鼠的跳動

將刻有編號0,1,2,3,...的罐子等距地擺放在輸送帶上，且輸送帶連同罐子等速往左邊移動，但是沙鼠從0號罐子往右邊跳，每一跳的前進距離都是1單位(即相鄰兩罐子的距離)：



當沙鼠每秒跳一次時，12跳後到達最後一個罐子；但當沙鼠加快速度每秒跳二次時，20跳後到達最後一個罐子。問：輸送帶上所擺的最後一個罐子的編號是幾號。

59.3 調撥鬧鐘的遊戲

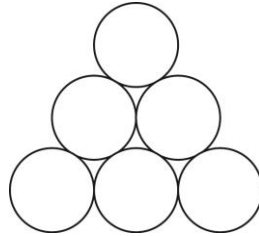
將鬧鐘設定在六點整的位置，甲乙兩人輪流調撥鬧鐘，每次只能將鬧鐘往前調30分鐘或1小時：



將鬧鐘調撥到十二點整的人獲勝，問：先玩或者後玩的人有必勝的策略。

59.4 填數字遊戲

將 1, 2, 3, 4, 5, 6 六個數字填入底下六個圓圈內，每個圓圈填入不同的數字：



如果要求每個圓圈上的數字必須是底下兩個圓圈上的數字差，那麼一共有多少種不同的填法？

探討 這是三層圓圈填數字的遊戲，推廣成 n 層時，其填入的方法是否有公式？

59.5 拿石頭字遊戲

甲乙兩人輪流取 N 顆石頭，每次不能全部拿走對方留下的石頭，但取走的石頭數目必須是對方留下石頭數目的正因數。舉例來說，當 $N=8$ 時，第一輪甲只能拿 1, 2 或 4 顆石頭。若甲拿 2 顆石頭，則剩下 6 顆石頭，此時乙只能選擇拿走 1, 2 或 3 顆石頭。

很顯然的，當剩下 1 顆石頭時，遊戲就停止了，因為下一位玩者無法根據規則拿石頭，所以贏者是讓石頭剩 1 顆的人。

哪些數字 N 是先玩的甲會贏的石頭數，又其策略為何？

59.6 想兩個數

從

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

中想兩個數。然後依下列程序操作這兩個數：

- ① 將第一個數加 1。
- ② 將得到的數乘 5。
- ③ 將得到的數再加 1。
- ④ 將得到的數再乘 2。
- ⑤ 將得到的數減 1。
- ⑥ 將得到的數加上第二個數。
- ⑦ 將所得的數再加 2。
- ⑧ 將所得的數再乘 2。
- ⑨ 將所得的數再減 8。
- ⑩ 最後將所得的數除以 2。

只要告訴我最後所得到的數，便可知道你想的那兩個數。

59.7 拿石頭字遊戲

甲乙兩人輪流取 N 顆石頭，每次只能取完全平方顆石頭，例如 1, 4, 9, 16, ... 顆石頭，取完所有石頭者勝。

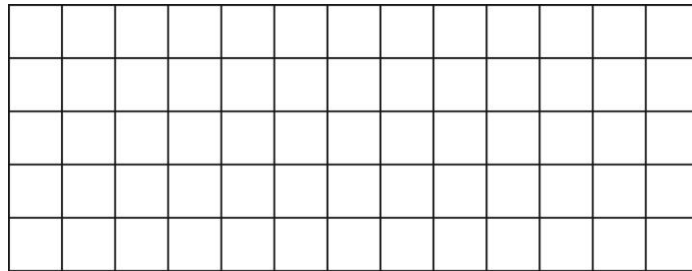
探討 顯然當 $N = 2, 5, 7, 10, \dots$ 時，後玩的乙會贏。

- ① 後玩的乙會贏的石頭數 N 是否有無窮多個？
- ② 找出後玩的乙會贏的石頭數 N 的規律。
- ③ 有兩堆石頭，一堆是甲的，另一堆是乙的，甲乙兩人輪流取這兩堆石頭，規則如下：
 - (i) 每次只能從一堆（自己的這堆或者是對方的那堆）石頭中取走完全平方顆石頭。
 - (ii) 當哪方的那堆石頭被完全取完時，該方算輸。

試問：兩堆石頭數為何時，先玩的甲會有必勝的策略，又其策略為何？

59.8 切割方格紙的遊戲

在 5×13 的方格紙上，甲乙兩人玩切割方格紙的遊戲：



遊戲規則：

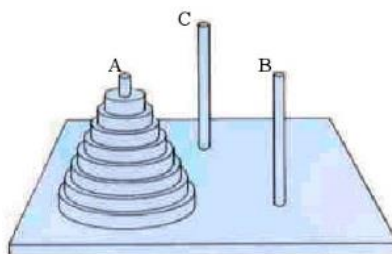
- (1) 甲乙輪流切割方格紙，甲先，乙後。
- (2) 每次必須割掉較短邊長的正方形數個，例如甲必須割掉邊長為5的正方形一個或兩個。
- (3) 最後將方格紙割掉者贏。

問：甲或乙有必勝的策略。

59.9 河內塔遊戲…規律的搜尋

印度河內塔遊戲也是一道與數列規律有關的遊戲，早期的部編版高中數學教科書就是用「河內塔遊戲」當引例介紹數學歸納法。

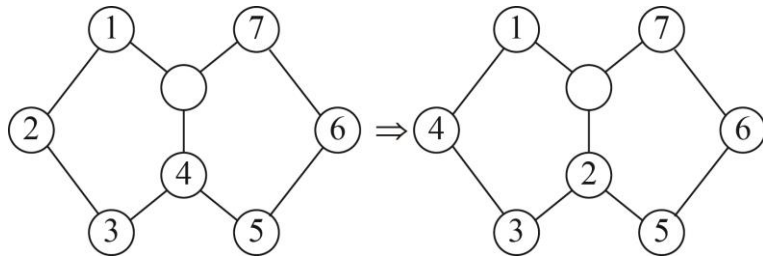
有 A, B, C 三根柱子，A 柱有八個圓盤依小到大疊著，要將 A 柱子的圓盤搬到 C 柱子，每次只能移動一個圓盤，且圓盤只能小的疊在大的上面，如此最少需要移動幾次？才能達成目的。進一步，如果 A 柱子有 n 個大小不一的盤子，依此規則，最少需要移動幾次？如果有些是相同又如何？



59.10 轉動法輪

將寫有 1,2,3,4,5,6,7 的七枚硬幣擺在左圖八格中的七格。規定每次移動僅能將空白格附

近的硬幣沿著路徑滑動至空白格的位置。試問：是否可以將左圖經過有限次的滑動之後，變成右圖。



59.11 分水遊戲

開始時，讓 A 瓶是空瓶， B 瓶裝有 2 公升的水。每一輪操作都是先將 A 瓶的水倒出 $\frac{1}{3}$ 到 B 瓶，然後再將 B 瓶的水倒出 $\frac{1}{4}$ 回 A 瓶。舉例來說，在第一輪操中，因為 A 瓶是空瓶，所以倒 0 公升的水到 B 瓶，此時 B 瓶仍是 2 公升的水；但在倒出 $\frac{1}{4}$ 回 A 瓶後， A 瓶有水 $\frac{1}{2}$ 公升，而 B 瓶的水剩 $\frac{3}{2}$ 公升。

如果分水遊戲持續進行，那麼最後 A 瓶與 B 瓶的水會是多少公升呢？